Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 61–64

Траектория в $\mathbb{R}^2$, наиболее удаленная от наблюдателей

В. И. Бердышев

Институт математики и механики УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета,
Екатеринбург, Россия

Аннотация. В докладе поставлена новая экстремальная задача построения траектории движущегося объекта, наиболее удаленной от набора наблюдателей с фиксированными конусами обзора. При некоторых ограничениях на расположение наблюдателей дана характеризация оптимальной траектории.

Пусть t — объект, движущийся внутри заданного коридора $Y \subset \mathbb{R}^2$, Y является замыканием открытого односвязного множества, соединяющего заданные начальную t_* и конечную t^* точки траектории движения объекта

$$\mathcal{T} = \{t(\tau) :\ 0 \leqslant \tau \leqslant 1,\ t(0) \in V(t_*),\ t(1) = V(t^*)\} \subset Y. \tag{1}$$

Множество траекторий (1) обозначим через $\mathbb{T}$. Предполагается, что задан конечный набор наблюдателей $\mathbb{S} = \{S\}$, не принадлежащих внутренности коридора $\overset{\circ}{Y}$. Каждый наблюдатель S имеет фиксированный конус обзора $K(S)$ — выпуклый открытый конус в $\mathbb{R}^2$ с вершиной S такой, что любая траектория из $\mathbb{T}$ его пересекает.

Определим расстояние от точки t до S следующим образом

$$\rho(t, S) = \begin{cases} \|t - S\| & \text{при } \ t \in K(S), \\ +\infty & \text{при } \ t \notin K(S). \end{cases}$$

Задача состоит в поиске траектории $\mathcal{T}^* \in \mathbb{T}$, реализующей максимум

$$M = M(\mathbb{S}) \overset{\text{def}}{=} \max_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}} \min\{\rho(t, S) :\ t \in \mathcal{T},\ S \in \mathbb{S}\} = \min_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}}\{\rho(t \in \mathcal{T}^*),\ S \in \mathbb{S}\}. \tag{2}$$

Эта задача относится к проблематике, обсуждаемой в [1].

В данной работе указываются характеристические свойства оптимальных (наилучших) траекторий.

Граница $\Gamma = bdY$ множества Y разбивается на две части: левую Γ_l и правую Γ_r по отношению к объекту, движущемуся от t_* к t^* по кратчайшей траектории из $\mathbb{T}$. Наблюдателя S будем называть левым $S = S_l$ (правым S_r), если к S граница Γ_l (граница Γ_r) ближе, чем Γ_r (чем Γ_l) и обозначать $\mathbb{S}_l = \{S_l\}$, $\mathbb{S}_r = \{S_r\}$. Рассмотрим частные случаи.

I. Для левого (правого) наблюдателя S через $\mathcal{P}(\delta) = \{p\}$ обозначим множество точек $p = p(S)$, ближайших к S из правой (левой) границы и положим

$$M(S) = \rho(S, \mathcal{P}(S)). \tag{3}$$

Отметим очевидное

Исследования поддержаны Программой государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-9356.2016.1).

Предложение 1. *Пусть набор $\mathbb{S}$ наблюдателей таков, что $K(S_l) \cap K(S_r) \cap Y = \varnothing$ для любых $S_l \in \mathbb{S}_l$ и $S_r \in \mathbb{S}_r$. Оптимальная траектория $\mathcal{T}^* \in \mathbb{T}$ характеризуется свойствами:*

$\mathcal{P}(S) \subset \mathcal{T}^*$ для всех S, реализующих минимум $M = \min\limits_{S \in \mathbb{S}} M(S)$,

$\rho(S, \mathcal{T}^*) \geqslant M$ для всех $S \in \mathbb{S}$. Любая траектория, содержащая части границ $K(S_l) \cap \Gamma_r$, $K(S_r) \cap \Gamma_l$ и удовлетворяющая условию $\rho(S, \mathcal{T}^*) \geqslant M$, является оптимальной.

II. Пусть $\mathbb{S} = \{S_l, S_r\}$, где пара наблюдателей S_l, S_r такова, что $(K(S_l) \cap K(S_r)) \cap Y \neq \varnothing$. Обозначим

$$Q = \{x \in K(S_l) \cap K(S_r) \cap Y : \ \|x - S_l\| = \|x - S_r\|\}.$$

Возможны два случая: 1) $Q \neq \varnothing$, 2) $Q = \varnothing$. Любая траектория пересекает конусы $K(S)$, $S \in \mathbb{S}$. Наилучшая траектория $\mathcal{T}^*$ Должна их пересекать возможно дальше от вершины S, а вне множества $\overline{K}(S_l) \bigcup \overline{K}(S_r)$ она может быть произвольной.

В случае 1 траектория, очевидно, пересекает множество $\overline{K}(S_l) \bigcap \overline{K}(S_r)$, точнее, она содержит точку $p \in p(S_l, S_r) \in Q$, реализующую минимум

$$M(S_l, S_r) = \min_{p \in \overline{K}(S_l) \bigcap \overline{K}(S_r)} \max\big\{\|S_l - p\|, \|S_r - p\|\big\} =$$

$$= \max\big\{\|S_l - p(S_l, S_r)\|, \|S_r - p(S_l, S_r)\|\big\}. \tag{4}$$

Далее будет удобно точку $p = p(S_l, S_r)$ обозначать через p' в случае 1 и через p'' в случае 2.

Замечание 1. Точка $p' = p'(S_l, S_r)$ лежит на границе одного из конусов $\overline{K}(S_l), \overline{K}(S_r)$, обозначим его вершину через $S' = S'(S_l, S_r)$, и пусть $S = S(S_l, S_r) \in \mathbb{S}$, $S \neq S'$. Для точки t из интервала (p', S') имеем

$$\rho(t, S') = +\infty, \quad \rho(t, S) > \|p' - S'\|,$$

поэтому отрезок $[p, S'] \bigcap Y$ можно включить в наилучшую траекторию $\mathcal{T}^*$. Кроме того, в $\mathcal{T}^*$ можно включить две дуги окружностей $C' = \{t \in K(S') : \ \|t - S'\| = \|p' - S'\|\}$, $C = \{t \in K(S) : \ \|t - S\| = \|p' - S\|\}$. Имеем

$$M(S_l, S_r) = \|S_l - p'\| = \|S_r - p'\|.$$

Пусть в случае 2 вершины S'', $S \in \mathbb{S}$ таковы, что

$$\|t - S''\| < \|t - S\| \ \forall\, t \in \overline{K}(S_l) \cap \overline{K}(S_r) \tag{5}$$

и точка $p'' = p''(S_l, S_r)$ — решение задачи (4). Тогда p'' — ближайшая к S точка из $\overline{K}(S_l) \cap \overline{K}(S_r)$, а наилучшая траектория содержит точку p'', не пересекается с $K(S_l) \cap K(S_r)$ и пересекается с $K(S'')$ возможно дальше от S'' (рис. 2). Имеем $M(S_l, S_r) = \|p'' - S''\|$.

Замечание 2. Отрезок $\{(1 - \lambda)p'' + \lambda S'' : \ \lambda \in \mathbb{R}\} \cap Y$ может быть включен в траекторию $\mathcal{T}^*$.

На рис. 1, 2 заштрихована область в окрестности точек p' и p'', где может располагаться $\mathcal{T}^*$. Точечной линией изображена возможная траектория $\mathcal{T}^*$.

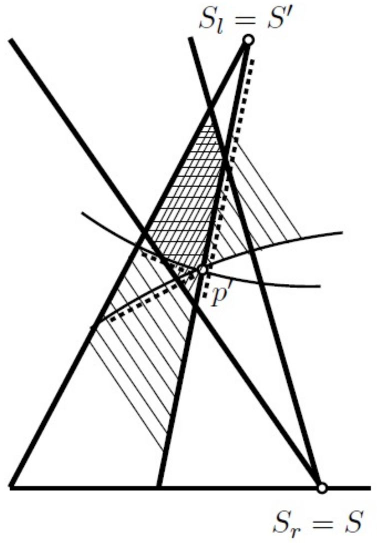

Рис. 1

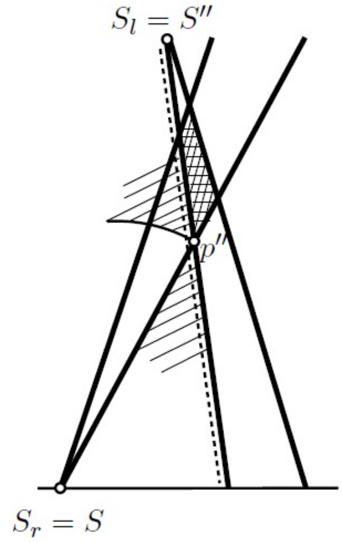

Рис. 2

Доказано

Предложение 2. *В случае* II *имеет место равенство (см.* (2), (3)*)*

$$M = \min\left\{M(S_l, S_r), M(S_l), M(S_r)\right\}.$$

Уточним обозначение точки $p = p(\cdot,\cdot)$. В случае 1 на позицию первой переменной помещаем вершину $S' \in \mathbb{S}$, для которой граница конуса $\overline{K}(S')$ содержит точку p'. В случае 2 на позиции первой переменной помещена вершина S'', для которой выполняется (5).

III. Пусть $\mathbb{S}$ — тройка наблюдателей $\mathbb{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$, где $S_1 \in \mathbb{S}_r,\ S_2 \in \mathbb{S}_l,\ S_3 \in \mathbb{S}_l$, такая, что множества

$$K(S_1) \cap K(S_2), \quad K(S_1) \cap K(S_3)$$

непусты и не пересекаются.

Предложение 3. *Для* $\mathbb{S}$ *существует оптимальная траектория, содержащая точки* $p(S_2, S_1),\ p(S_3, S_1)$ *и*

$$M(\mathbb{S}) = \min\left\{M(S_2, S_1), M(S_3, S_1), M(S_1), M(S_2), M(S_3)\right\}. \tag{6}$$

Доказательство. Названные точки принадлежат замыканию конуса $K(S_1)$. Если обе точки имеют вид $p''(S_2, S_1),\ p''(S_3, S_1)$, то они лежат на одной стороне конуса $\overline{K}(S_1)$ и в силу замечания 2 соединяются траекторией $\mathcal{T}^*$, лежащей на этой стороне и продолжающейся вне ее по Γ_l и Γ_r. Если эти точки имеют вид $p''(S_2, S_1),\ p''(S_1, S_3)$, то они соединяются частью траектории $\mathcal{T}^*$, состоящей из отрезков границы $bdK(S_2)$, содержащей точку $p''(S_2, S_1)$, и границы $bdK(S_1)$, содержащей точку $p''(S_1, S_3)$, и, возможно, частью границы Γ_l между этими отрезками. Остальная часть траектории лежит на Γ_r. Пусть точки p имеют вид $p''(S_2, S_1),\ p'(S_1, S_3)$ и точка $q_1 \in bdK(S_1),\ q \neq p'(S_1, S_3)$ такова, что $\|q_1 - S_1\| = \|p'(S_1, S_3) - S_1\|$ и $s = \Gamma_r \cap \{(1-\lambda)S_2 + \lambda p''(S_2, S_1):\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Тогда эти точки соединяются отрезком $[p''(S_2, S_1), q]$ и другой $(q_1, p'(S_1, S_3))$ окружности радиуса $\|q_1 - S_1\|$ с центром S_1, а остальная часть траектории включает в себя отрезки $[p''(S_2, S_1), s]$, $[p'(S_1, S_3), S_1]$ и куски границы Γ_r от t_* до s_2 и от S_1 до t^*. Пусть точки p имеют вид $p'(S_2, S_1),\ p'(S_1, S_2)$, точка q_1 определена выше, точка $q_2 \in bdK(S_2),\ q_2 \neq p'(S_2, S_1)$ такова, что $\|q_2 - S_2\| = \|p'(S_2, S_1) - S_2\|$ и $s_2' = \Gamma_r \cap \{(1-\lambda)S_2 + \lambda q_2\}$. Ввиду соотношения $(\overline{K}(S_1) \cap \overline{K}(S_3)) \cap (\overline{K}(S_1) \cap \overline{K}(S_2)) = \varnothing$ имеем $\|S_1 - p'(S_1, S_2)\| < \|S_1 - p'(S_2, S_1)\|$. Точки $p'(S_2, S_1),\ p'(S_1, S_2)$ можно соединить с помощью дуги $(q_1, p'(S_1, S_3))$ радиуса $\|q_1 - S_1\|$ с центром S_1 и отрезка $[p'(S_2,S_1),q_1]$. В траекторию $\mathcal{T}^*$ можно включить дугу $(q_2,p'(S_2,S_1))$ радиуса $\|q_2-S_2\|$ с центром S_2, отрезки $[q_2,s_2']$, $[p'(S_1,S_3),S_1]$ и куски границы Γ_r от t_* до s_2', и от S_1 до t^*. Равенство (6) обеспечивается способом построения траектории $\mathcal{T}^*$. Предложение установлено.

Замечание 3. Наилучшая траектория $\mathcal{T}^*$ не обязана содержать все точки $p(S_i,S_j),\ S_i\in\mathbb{S}_l,\ S_j\in\mathbb{S}_r$. Существует пример набора $\mathbb{S}$, для которого $\mathcal{T}^*$ не может пройти через все такие точки.

IV. Рассмотрим случай произвольного (конечного) числа наблюдателей. Естественно требование расположить их экономно в определенном смысле, в частности, ограничить сверху кратность покрытия коридора Y множественными $K(S_i),\ S\in\mathbb{S}$. Будем считать, что

$$(K(S_i)\cap K(S_j))\cap Y=\varnothing \ \text{ для } \ S_i,S_j\in\mathbb{S}_l \ \text{ и для } \ S_i,S_j\in\mathbb{S}_r. \tag{7}$$

Ясно, что группа наблюдателей, расположенных на одном «берегу», например, на Γ_l, обеспечивает более полное покрытие в зоне Γ_r, чем вблизи Γ_l. Поэтому на обоих «берегах» должно быть (с учетом раствора конусов $K(S)$) примерно одинаковое число наблюдателей. Ради удобства будем считать, что наблюдатели располагаются на границах $\Gamma_l,\ \Gamma_r$ и нумеровать их в порядке от t_* к t^* посредством верхних индексов для левой границы и нижних индексов для правой. Итак, имеем набор конусов $K(S^i),\ S^i\in\mathbb{S}_l,\ K(S_j),\ S_j\in\mathbb{S}_r$.

Имеет место

Теорема. *Справедливо равенство*

$$M(\mathbb{S})=\min\left\{M(S^i,S_j),M(S^i),M(S_j):\ S^i\in\mathbb{S}_l,\ S_j\in\mathbb{S}_r\right\}.$$

Наилучшая траектория $\mathcal{T}^*\in\mathbb{T}$ характеризуется свойствами:

$\mathcal{T}^*$ содержит точки $p(S^i),p(S_j)$ для всех одиночных наблюдателей S^i,S_j и всех пар (S^i,S_j) наблюдателей, реализующих минимумов (7),

$\rho(S,\mathcal{T}^*)\geqslant M$ для всех $S\in\mathbb{S}$.

Существует наилучшая траектория, содержащая все точки $p(S^i,S_j)\colon S^i\in\mathbb{S}_l,\ S_j\in\mathbb{S}_r$.

Список литературы

1. *Бердышев В.И., Костоусов В.Б.* Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. – Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН. 2007. 270 с.